

Análisis cualitativo y visualización gráfica de trayectorias del sistema de ecuaciones de Rossler en \mathbb{R}^3 con Octave

Eder Escobar Gómez

eescobarg@unp.edu.pe

*Departamento de Matemática
Universidad Nacional de Piura
.Urb. Miraflores-Castilla-Perú.*

Karen Vanessa Arias Abramonte

karenabramonte@gmail.com

*I.E.P Santa María
.Av. San Ramón 263 el Chipe-Piura-Perú.*

Nilthon Arce Fernandez

nilthon_arce@unj.edu.pe

*Universidad Nacional de Jaen
.Jr. Cuzco N° 250, Pueblo Libre Jaén, Cajamarca - Perú.*

Edwar Luján Segura

elujan@uct.edu.pe

*Universidad Católica de Trujillo
.Panamericana Norte Km. 555, Moche, Trujillo, La Libertad, Perú.*

Flabio Gutiérrez Segura

flabio@unp.edu.pe

*Departamento de Matemática
Universidad Nacional de Piura
.Urb. Miraflores-Castilla-Perú.*

Resumen

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, en su mayoría no expresan soluciones de forma explícita. El análisis de confiabilidad de la solución de un sistema no lineal, se realiza con el análisis cualitativo. En este trabajo se presenta un análisis cualitativo del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de Rossler en el espacio tridimensional, que permite analizar el comportamiento de sus trayectorias cerca de un punto de equilibrio así como su estabilidad. Se ha creado un programa en la herramienta computacional octave para visualizar el comportamiento de sus trayectorias en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Palabras clave: sistema de Rossler, sistemas no lineales, atractor extraño, Octave

Abstract

The systems of nonlinear ordinary differential equations, for the most part, do not express solutions explicitly. The reliability analysis of the solution of a non-linear system is carried out with qualitative analysis. In this work a qualitative analysis of the system of nonlinear Rossler differential equations in three-dimensional space is presented, that allows to analyze the behavior of its trajectories near an equilibrium point as well as its stability. A program has been created in the octave computational tool to visualize the behavior of its trajectories in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 .

keywords: Rossler system, nonlinear systems, strange attractor, Octave

1. Introducción

Varios fenómenos físicos se modelan con sistemas de ecuaciones diferenciales. Estos modelos matemáticos no reflejan exactamente el fenómeno, pero si lo hacen en una forma bastante aproximada, la confianza en los resultados del modelo lo da el análisis cualitativo del sistema.

En 1976, el matemático Otto Rossler desarrolló un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, denominado sistema de Rossler (ver ecuación 1), el cual es más simple que el sistema de Lorenz, pero que presenta también un atractor extraño. Estas ecuaciones representan una versión simplificada de las que describen los sistemas de reacciones químicas oscilantes. Para su análisis cualitativo se suelen fijar los valores de los parámetros a y b en el valor 0.2, y se deja el parámetro r variable. Cuando $a = b = 0.2$ y $r = 5.7$ el sistema posee un atractor extraño.

La primera ecuación no presenta ningún problema al análisis por su naturaleza lineal con respecto a las variables y y z . La segunda ecuación no presenta ningún problema al análisis por su naturaleza lineal, la tercera ecuación es donde surgen términos no lineales que harán posible la aparición del fenómeno de dinámica caótica. Recordando que los parámetros deben ser de la forma $a > 0$, $b > 0$ y $r > 0$ para que el problema tenga sentido físico.

En Wiggins et al. (1990), Kuznetsov (2013), Verhulst (2006) se realizaron análisis cualitativos para este tipo de sistemas no lineales. Trabajos relacionados sobre el sistema de Rossler en un espacio de tres dimensiones se pueden encontrar en Gang-Quan et al. (2011), Ma and Yang (2013), Li and Sprott (2014). El programa implementado en Octave que se muestra en este artículo, se puede utilizar para analizar sistemas no lineales 3D que surjan en diversas disciplinas como electrónica y telecomunicaciones, biología, meteorología, economía, medicina, etc.

2. Preliminares

Definición 1 . *Punto de equilibrio Verhulst (2006).*

El punto $X = a$ con $f(a) = 0$, se llama punto crítico de la ecuación $X' = f(X)$.

Definición 2 . *Bifurcación de Hopf Kuznetsov (2013).*

La bifurcación correspondiente a la presencia de $\lambda_{1,2} = \pm iw_0$, con $w_0 > 0$, se llama bifurcación de Hopf.

Teorema 1 *Lyapunov Kuznetsov (2013).*

Considere un sistema dinámico definido por. $X' = F(X)$, donde $X \in \mathbb{R}^n$, F es continua. Supongamos que tiene un equilibrio X_0 , $A = F_X(X_0)$ (A es la matriz jacobiana de $F(X)$ evaluada en el equilibrio). Entonces X_0 es estable si todos los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de A satisfacen $Re(\lambda) < 0$.

3. Modelo químico de Rossler 3D

Este modelo fue diseñado por el biólogo alemán Otto Rossler al estudiar las oscilaciones en la reacción química de Belousov-Zhabotinsky, que es la oxidación de ácido malónico ($C_3H_4O_4$) mediante bromato en presencia de iones metálicos (BrO_3), llegando a dar un

modelo que tenía un comportamiento caótico para ciertos valores de los parámetros. Las ecuaciones diferenciales que definen el modelo de Rossler son:

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + (x - r)z \end{cases} \quad (1)$$

Donde x , y y z son las concentraciones de sustancias en las reacciones químicas estudiadas por Rossler; a , b y r son parámetros del sistema. Como se ve, las dos primeras ecuaciones son lineales y la tercera contiene un solo término no lineal (en xz). Para su análisis cualitativo se suelen fijar los valores de los parámetros a y b en el valor 0.2, y se deja el parámetro r variable.

4. Comportamiento del modelo de Rossler

4.1 Duplicación de periodo

Se estudia el comportamiento del modelo de Rossler fijando el valor de los parámetros $a = b = 0.2$ y variando el valor del parámetro r .

Caso 1: Cuando $r = 2$ y $(x_0, y_0, z_0) = (0, -3.82, 0)$ se obtienen órbitas de periodo 1 (ver Figura 1)

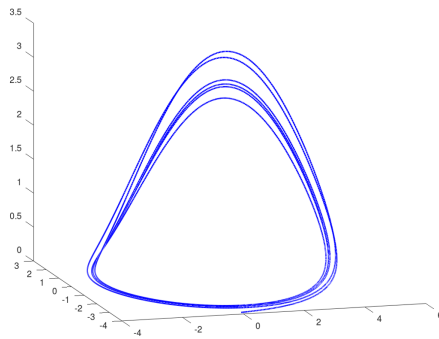


Figura 1: Cuando $r = 2$ se presentan órbitas con periodo uno.

Caso 2: Cuando $r = 3.5$ y $(x_0, y_0, z_0) = (0, -4.5, 0)$, se obtienen órbitas de periodo dos (ver Figura 2).

Caso 3: Cuando $r = 4$ y $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, 0)$, se obtienen órbitas de periodo cuatro (ver Figura 3).

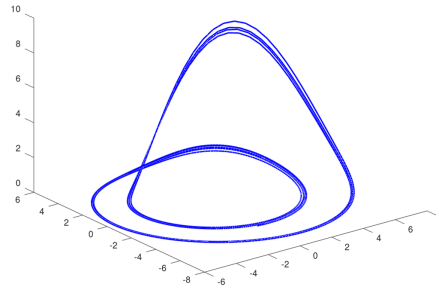


Figura 2: Órbitas de periodo doble

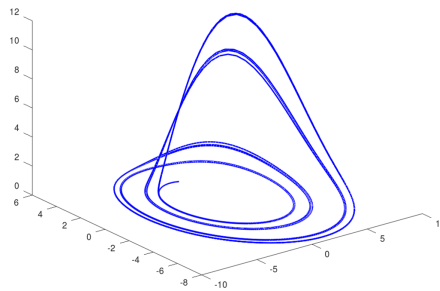


Figura 3: Órbitas de periodo cuatro

4.2 Atractor extraño de Rossler

Cuando $r > 5$ y $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, 0)$, el sistema se comporta de forma caótica y su dinámica está regida por la presencia de un atractor extraño (ver Figura 4).

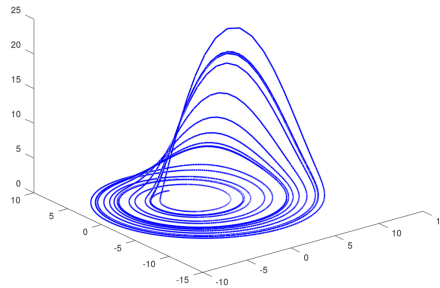


Figura 4: Atractor extraño de Rossler

Para comprobar que este atractor es caótico, vamos a ver que efectivamente existe extrema sensibilidad a las condiciones iniciales, la característica principal del movimiento caótico.

Caso 1: La trayectoria de color rojo se da con la condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, 0)$ y la trayectoria de color azul se da con la condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0.123, 3, 0)$ (ver Figura 5).

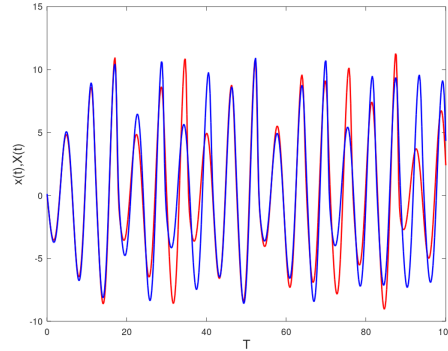


Figura 5: Pequeñas variaciones en la condición inicial x_0 , grandes variaciones en las trayectorias.

Como se puede observar en la gráfica, las dos trayectorias se inician muy próximas y, a medida que pasa el tiempo, estas trayectorias se alejan más, demostrando sensibilidad en la condición inicial. Lo podemos visualizar también en los dos casos que siguen.

Caso 2: La trayectoria de color rojo se da con la condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, 0)$ y la trayectoria de color azul se da con la condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3.124, 0)$, (ver Figura 6).

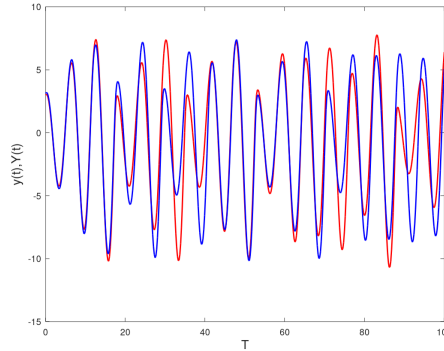


Figura 6: Pequeñas variaciones en la condición inicial y_0 , grandes variaciones en las trayectorias.

Caso 3: La trayectoria de color rojo se da con la condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, 0)$ y la trayectoria de color azul se da con la condición inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 3, 0.142)$, (ver Figura 7).

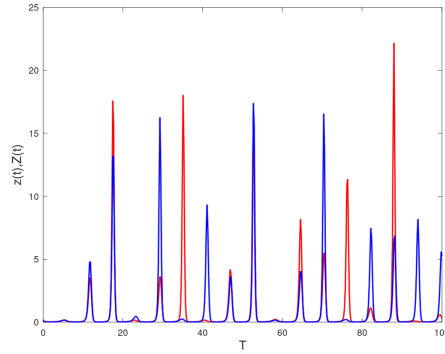


Figura 7: Pequeñas variaciones en la condición inicial z_0 , grandes variaciones en las trayectorias.

5. Comportamiento del modelo de Rossler

Para comprender el comportamiento del sistema de Rossler, y dado que sus dos primeras ecuaciones son lineales, se estudia sus dinámicas en el plano xy , haciendo $z = 0$, con lo que el sistema se reduce a:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + ay \end{cases} \quad (2)$$

En estas condiciones, el origen $(0,0,0)$ es un punto fijo o punto de equilibrio del sistema, cuya estabilidad depende del valor del parámetro a .

Cuando $0 < a < 2$, este punto es inestable, y el movimiento es una espiral en el plano xy que se aleja del origen (ver Figuras 8, 9, 10).

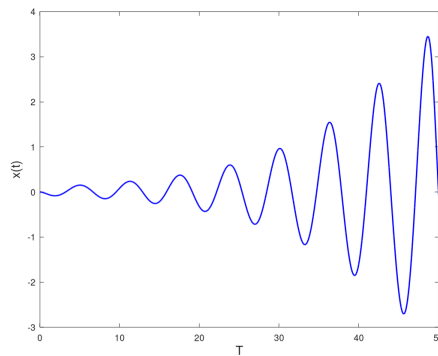


Figura 8: La trayectoria se aleja del origen en el eje x

La órbita realiza una espiral que, saliendo del origen, permanece cerca del plano XY siempre que $X < r$. Esto es debido a que la tercera ecuación tiene un coeficiente negativo en Z . Cuando el valor de X intenta sobrepasar el de r , la variable Z cambia bruscamente a

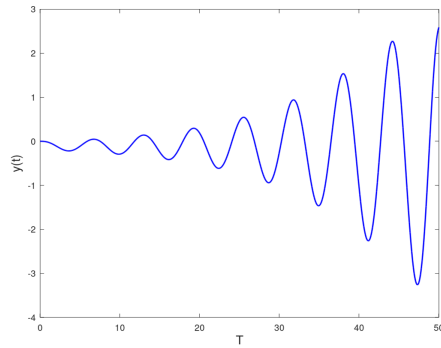


Figura 9: La trayectoria se aleja del origen en el eje y

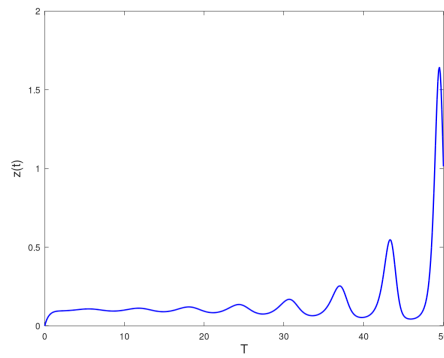


Figura 10: La trayectoria se aleja del origen en el eje z

valores positivos altos. Esto detiene el aumento de X debido al termino $-Z$ en la primera ecuación.

6. Puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones de Rossler

Existen dos puntos de equilibrio en el sistema de ecuaciones de Rossler y se van moviendo conforme van variando los parámetros.

$$\begin{cases} x' = -y - z \\ y' = x + ay \\ z' = b + (x - r)z \end{cases} \quad (3)$$

Para hallar los puntos críticos del sistema se iguala a cero cada ecuación.

$$-y - z = 0$$

$$y = -z$$

$$x + ay = 0$$

$$x = -ay$$

$$b + (x-r)z = 0$$

reemplazando los valores de x y y en la ecuación anterior se obtiene:

$$az^2 - rz + b = 0$$

Resolviendo la ecuación:

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4ab}}{2}$$

$$y = -\frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a}$$

$$z = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a}$$

$$P_1 = \left(\frac{r + \sqrt{r^2 - 4ab}}{2}, -\frac{r + \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a}, \frac{r + \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a} \right) \quad (4)$$

$$P_2 = \left(\frac{r - \sqrt{r^2 - 4ab}}{2}, -\frac{r - \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a}, \frac{r - \sqrt{r^2 - 4ab}}{2a} \right) \quad (5)$$

7. Linealización del sistema de ecuaciones de Rossler en 3D

Utilizando la matriz Jacobiana del sistema y los valores iniciales estimados (x_0, y_0, z_0) es posible predecir si la linealización será estable o no, para ello se debe obtener los autovalores λ . Si λ contiene algún valor con signo negativo, se puede asegurar que la linealización tendrá una geometría de foco o punto inestable.

Hallando la matriz Jacobiana del sistema de ecuaciones de Rossler.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x - r \end{pmatrix}$$

La matriz Jacobiana del sistema, evaluado en el punto de equilibrio P_1 (ver ecuación 4) es el siguiente.

$$\text{Sea } a_1 = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4ab}}{2}, a_2 = \frac{a_1}{a}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ a_2 & 0 & a_1 - r \end{pmatrix}$$

7.1 Cálculo de valores propios en P_1

Hallando los valores propios del sistema de Rossler en P_1 (ver ecuación 4).

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - a & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda - a_1 + r \end{vmatrix} = 0$$

Usando la regla de sarrus, se ha obtenido el siguiente polinomio cúbico.

$$\lambda^3 + (r - a_1)\lambda^2 + (a_2 - a - 1)\lambda + (aa_1 + a_1 - ar - r - a_2a) = 0$$

Haciendo cambio de variable en los coeficientes del polinomio cúbico.

$$A_1 = r - a_1$$

$$A_2 = a_2 - a - 1$$

$$A_3 = aa_1 + a_1 - ar - r - a_2a$$

Se obtiene

$$\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0 \tag{6}$$

Caso 1: Cuando $0 < r < 0.4$, el sistema presenta dos valores propios complejos. El primero con parte real negativa y el segundo con parte real positiva, el tercer valor propio es real positivo. Los dos puntos de equilibrio son complejos, en este intervalo donde pertenece r no se presentan soluciones reales.

Caso 2: Cuando $r = 0.4$, el sistema presenta dos valores propios imaginarios puros y el tercer valor propio es igual a cero. En este caso los puntos de equilibrio son reales, no se presentan soluciones reales.

Caso 3: Cuando $0.4 < r < 1.6$, el sistema presenta dos valores propios complejos con parte real negativa y tercer valor propio es real positivo. Los dos puntos de equilibrio son reales, en este intervalo donde pertenece r se presentan soluciones reales, las trayectorias se aproximan al punto de equilibrio P_1 formando un ciclo límite estable. (ver Figura 11).

Caso 4: Cuando $1.6 < r < \infty$, el sistema presenta dos valores propios imaginarios puros y el tercer valor propio es real. Las trayectorias giran formando curvas cerradas. (ver Figura 12).

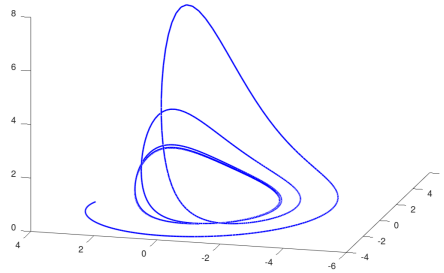


Figura 11: Cuando $r = 1.3$, las trayectorias se aproximan al punto de equilibrio P_1

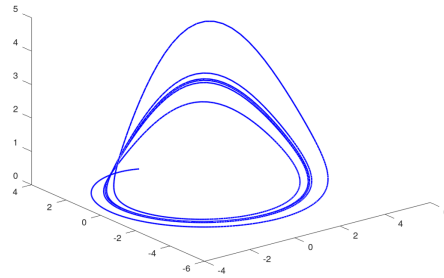


Figura 12: Cuando $r = 2$, las trayectorias giran formando curvas cerradas.

8. Bifurcación en el sistema de ecuaciones de Rossler

La aparición de un retrato de fase topológicamente no equivalente bajo variación de parámetros se llama bifurcación. Todas las bifurcaciones son respecto del parámetro r , manteniendo fijos los otros dos parámetros en los valores $a = 0,2$ y $b = 0,2$

8.1 Bifurcación de Hopf

Cuando $r = 1,6$, la ecuación (1) presenta dos valores propios imaginarios puros y un valor propio real. Por lo tanto, podemos concluir que ocurre una bifurcación de Hopf. (ver Figura 13).

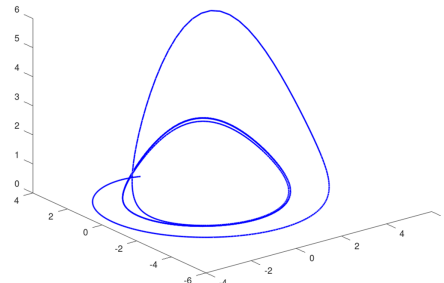


Figura 13: Cuando $r = 1.6$, las trayectorias giran alrededor del punto de equilibrio formando elipses.

9. Exponentes de Lyapunov

El sistema de ecuaciones de Rossler presenta tres exponentes de Lyapunov, dos positivos y un negativo.

Cuando $a = 0.2$, $b = 0.2$, $r = 5.7$ y condición inicial $(0,3,0)$ el valor de los exponentes de Lyapunov es el siguiente:

$\lambda_1 = 0.072944$, $\lambda_2 = 0.011737$, $\lambda_3 = -5.392809$. (ver Figura 14).

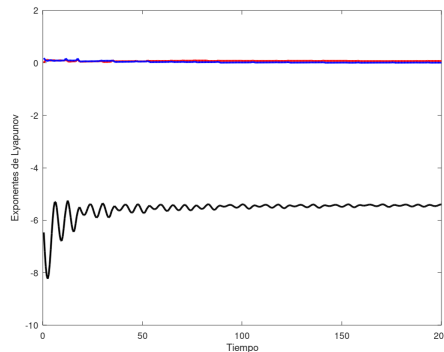


Figura 14: Exponentes de Lyapunov.

10. Paquete en Octave para visualizar superficies de fase de sistemas en 3D

SCRIP 01: Código para graficar las trayectorias en 3D

```
x=0;
function xdot=SistemaAutonomo3D(x,t)
a=0.1;r=4;b=2;
xdot(1,1)=-x(2)-x(3);
xdot(2,1)=x(1)+a*x(2);
xdot(3,1)=b+(x(1)-r)*x(3);
end
x0=[0 3 0]; t=linspace(0,250,1000);
tic;
x=lsode('SistemaAutonomo3D',x0,t);
toc;
z=[x(:,1) x(:,2) x(:,3)];
plot3(z(:,1),z(:,2),z(:,3),'linewidth',2)
```

SCRIP 02: Código para graficar las trayectorias en 2D

```
x=0;
function xdot=func(x,t)
a=0.2;r=5.7;b=0.2;
xdot(1,1)=-x(2)-x(3);
xdot(2,1)=x(1)+a*x(2);
```

```

xdot(3,1)=b+(x(1)-r)*x(3);
end
x0=[0 3 0]; X0=[0 3 0.01]; t=linspace(0,200,500);
tic;
x=lsode('func',x0,t); z=[t',x(:,1),x(:,2),x(:,3)];
toc;
plot(z(:,1),z(:,4),'r','linewidth',1.5)
xlabel('T','FontSize',14);
ylabel('z(t),Z(t)','FontSize',14);
hold on
tic;
X=lsode('func',X0,t);
Z=[t',X(:,1),X(:,2),X(:,3)];
toc;
plot(Z(:,1),Z(:,4),'b','linewidth',1.5)

```

SCRIP 03: Código para graficar una componente en función del tiempo

```

x=0;
function xdot=func(x,t)
a=0.2;r=1.99;b=0.2;
xdot(1,1)=-x(2)-x(3);
xdot(2,1)=x(1)+a*x(2);
xdot(3,1)=b+(x(1)-r)*x(3);
end
x0=[0 0 0]; t=linspace(0,50,500);
tic;
x=lsode('func',x0,t); z=[t',x(:,1),x(:,2),x(:,3)]
toc;
plot(z(:,1),z(:,4),'b','linewidth',1.5)
xlabel('T','FontSize',14); ylabel('z(t)','FontSize',14)

```

11. Conclusiones

El análisis cualitativo que se desarrolla en un sistema de ecuaciones no lineales permite conocer el comportamiento de sus trayectorias. Como caso de estudio se realizó el análisis cualitativo al sistema de ecuaciones no lineales de Rossler 3D encontrando sensibilidad en las condiciones iniciales, exponentes de Lyapunov, dos punto de equilibrio, ciclo límite, estabilidad, bifurcación de Hopf y un atractor extraño. El paquete **SistemaAutonomo3D**, permite visualizar las superficies de fase del sistema.

Referencias

Si Gang-Quan, Cao Hui, and Zhang Yan-Bin. A new four-dimensional hyperchaotic lorenz system and its adaptive control. *Chinese Physics B*, 20(1):010509, 2011.

Yuri A Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.

Chunbiao Li and Julien Clinton Sprott. Coexisting hidden attractors in a 4-d simplified lorenz system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(03):1450034, 2014.

Junhai Ma and Yujing Yang. Hyperchaos numerical simulation and control in a 4d hyperchaotic system. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013, 2013.

Ferdinand Verhulst. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2006.

Stephen Wiggins, Stephen Wiggins, and Martin Golubitsky. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer, 1990.